

ОТНОСНО ДВЕ РЕШЕНИЯ НА ЕДНА ЗАДАЧА ОТ МОМ 2023

Сава Гроздев, Веселин Ненков, Татяна Маджарова

Резюме. Разглеждат се синтетично и аналитично решения на една задача от Международната олимпиада по математика през 2023 г. Отбелязани са някои особености на решенията, които характеризират техни предимства и недостатъци. Тези особености са от геометрично и аналитично естество и разкриват спецификата на синтетичното решение и неудобствата, които предлага аналитичното решение. От друга страна аналитичното решение има предимство при по-нататъшни изследвания върху темата, която поставя разглежданата задача.

Ключови думи: равностраничен триъгълник, описана окръжност, пресечни точки, радикална ос, комплексно число, GSP, Maple.

В темата на Международната олимпиада по математика през 2023 г., проведена в Япония, една от задачите се състои във формулировката на следващото твърдение:

Твърдение 1. Даден е равностраничен триъгълник ABC . Точките A_1 , B_1 и C_1 са вътрешни за триъгълника, така че $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ и $\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ$. Нека BC_1 и CB_1 се пресичат в A_2 , CA_1 и AC_1 се пресичат в B_2 , а AB_1 и BA_1 се пресичат в C_2 . Ако $\triangle A_1B_1C_1$ е разностранен, описаните около триъгълниците AA_1A_2 , BB_1B_2 и CC_1C_2 окръжности имат две общи точки (Фиг. 1).

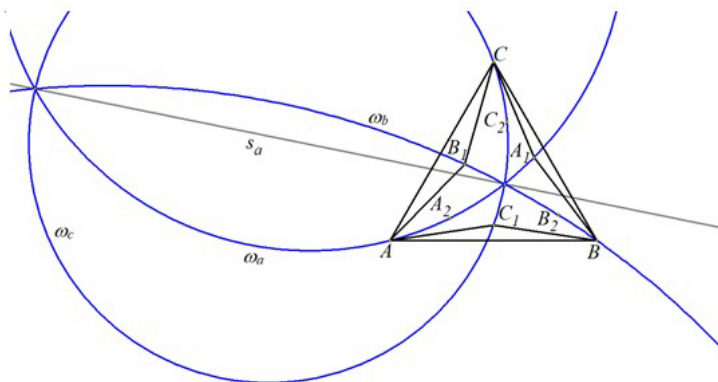
Ще представим две идеи за доказателство на твърдение 1 и няколко твърдения, които са свързани с него.

В началото нека въведем някои общи означения. Окръжностите, описани около триъгълниците AA_1A_2 , BB_1B_2 и CC_1C_2 , означаваме съответно ω_a , ω_b и ω_c (Фиг. 1). Освен това нека $\angle A_1BC = \angle A_1CB = \alpha$, $\angle B_1CA = \angle B_1AC = \beta$ и $\angle C_1AB = \angle C_1BA = \gamma$ (Фиг. 2).

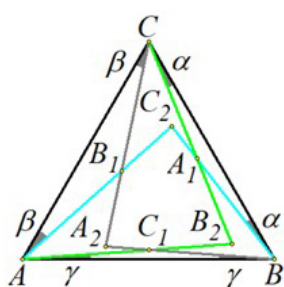
Доказателство на твърдение 1 с помощта на радикална ос

Ясно е, че всеки две от окръжностите ω_a , ω_b и ω_c имат общи точки. Затова твърдение 1 означава, че трите окръжности принадлежат на

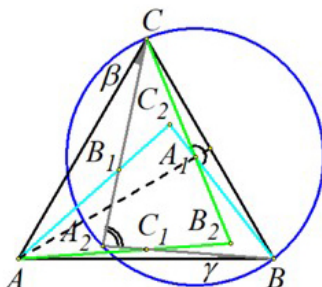
хиперболичен сноп окръжности. Двете общи точки на този сноп лежат върху права, която е радикална ос за всеки две окръжности от снопа. Така стигаме до идеята за определяне на тази радикална ос s_a по две точки P и Q от нея. Това се установява като се докажат последователно следващите помощни твърдения.



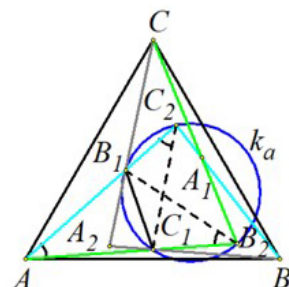
Фигура 1.



Фигура 2.



Фигура 3.



Фигура 4.

Лема 1. За ъглите α , β и γ е изпълнено равенството $\alpha + \beta + \gamma = 30^\circ$ (Фиг. 2).

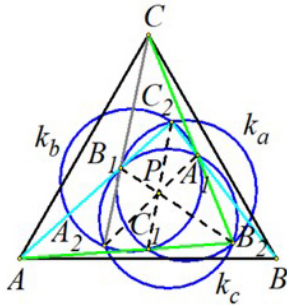
Лема 2. Точките A_1 , B_1 и C_1 са центрове на описаните окръжности съответно за триъгълниците $B_1C_1A_2$, $C_1A_1B_2$ и $A_1B_1C_2$ (Фиг. 3).

Лема 3. Четириъгълниците $B_1C_1B_2C_2$, $C_1A_1C_2A_2$ и $A_1B_1A_2B_2$ са вписани съответно в окръжности k_a , k_b и k_c (Фиг. 4, 5).

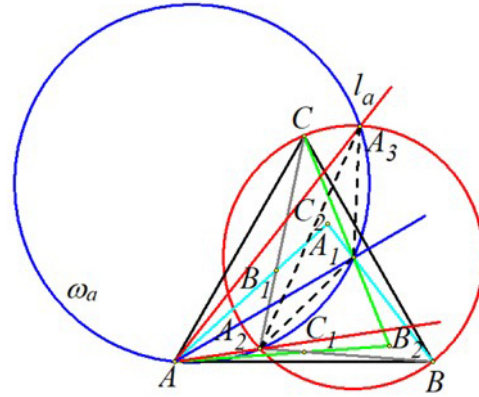
Лема 4. Радикалният център P на окръжностите k_a , k_b и k_c има еднакви степени спрямо окръжностите ω_a , ω_b и ω_c (Фиг. 5).

Нека правите l_a , l_b и l_c са симетрични съответно на AA_2 , BB_2 и CC_2 спрямо правите AA_1 , BB_1 и CC_1 (Фиг. 6). Ако A_3 , B_3 и C_3 са вто-

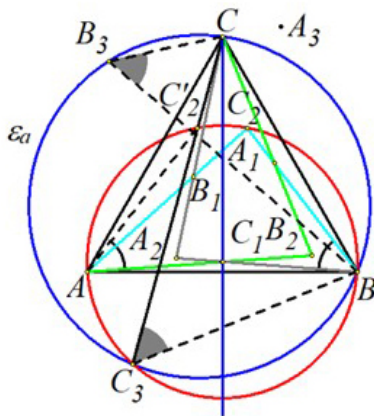
рите пресечни точки на l_a , l_b и l_c съответно с ω_a , ω_b и ω_c (Фиг. 6), то са изпълнени следващите твърдения.



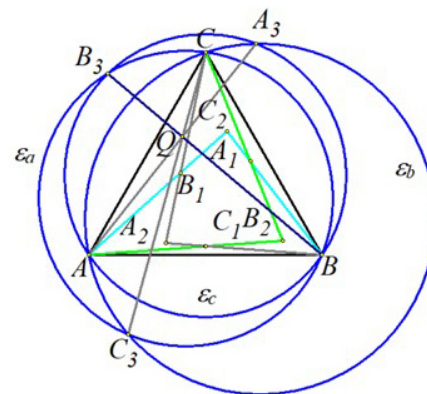
Фигура 5.



Фигура 6.



Фигура 7.



Фигура 8.

Лема 5. Четириъгълниците A_2BA_3C , B_2CB_3A и C_3AC_2B са вписани в окръжности, центровете на които са съответно точките A_1 , B_1 и C_1 (Фиг. 6).

Лема 6. Четириъгълниците BCB_3C_3 , CAC_3A_3 и ABA_3B_3 са вписани съответно в окръжности ϵ_a , ϵ_b и ϵ_c (Фиг. 7, 8).

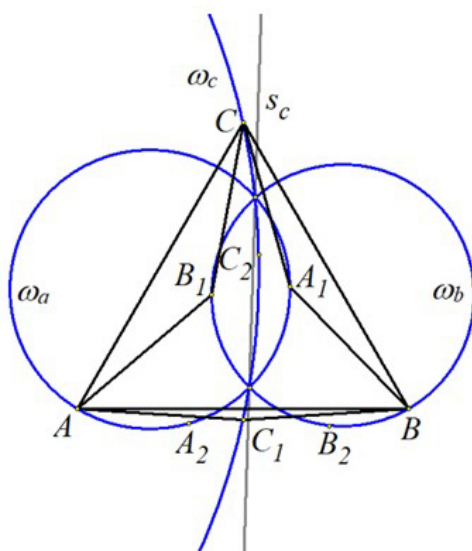
Лема 7. Радикалният център Q на окръжностите ϵ_a , ϵ_b и ϵ_c има еднакви степени спрямо окръжностите ω_a , ω_b и ω_c (Фиг. 8).

От лема 4 и лема 7 следва, че окръжностите ω_a , ω_b и ω_c имат обща радикална ос $s_a = PQ$. Следователно те се пресичат върху PQ (Фиг. 1). Оттук следва твърдението 1.

Твърдение 1 поставя въпроса за разглеждане на подобна конфигурация, в която една от точките A_1 , B_1 и C_1 е външна за равностранния

триъгълник. Оказва се, че подобно твърдение се получава ако се променят по подходящ начин условията $\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ$. Така се получава формулировката на следното:

Твърдение 2. *Даден е равностранен триъгълник ABC . Точките A_1 и B_1 са вътрешни за триъгълника, а C_1 – външна, като $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ и $\angle BA_1C + \angle CB_1A - \angle AC_1B = 120^\circ$. Нека BC_1 и CB_1 се пресичат в A_2 , CA_1 и AC_1 се пресичат в B_2 , а AB_1 и BA_1 се пресичат в C_2 . Ако $\triangle A_1B_1C_1$ е разностранен, описаните около триъгълниците AA_1A_2 , BB_1B_2 и CC_1C_2 окръжности имат две общи точки (Фиг. 9).*



Фигура 9.

Доказателството на твърдение 2 може да се проведе по същия начин, както при твърдение 1.

Подробни доказателства на твърдение 1 и твърдение 2, използващи разглежданата идея, са описани в [1].

Аналитично доказателство на твърдение 1 и твърдение 2

Ще разгледаме накратко и идея за аналитично доказателство на твърдение 1. Разглеждаме Гаусова координатна система, центърът на която е центърът на $\triangle ABC$. Афиксите на точките ще означаваме със съответните им малки букви. Освен това въвеждаме означенията: $A_0 = e^{i\alpha}$, $B_0 = e^{i\beta}$, $C_0 = \bar{A}_0\bar{B}_0e^{i\frac{\pi}{6}}$. Тъй като $\vec{BA}_1$, $\vec{CB}_1$ и $\vec{AC}_1$ се получават след завъртане на $\vec{BC}$, $\vec{CA}$ и $\vec{AB}$ съответно на ъгли α , β и $\gamma = \frac{\pi}{6} - \alpha - \beta$

(следва от лема 1), за афиксите на точките A_1 , B_1 и C_1 се получават равенствата:

$$a_1 = \frac{A_0^2 c + b}{A_0^2 + 1}, \quad b_1 = \frac{B_0^2 a + c}{B_0^2 + 1}, \quad c_1 = \frac{2A_0^2 B_0^2 a + (1 + i\sqrt{3})b}{2A_0^2 B_0^2 + 1 + i\sqrt{3}},$$

От уравненията на правите BC_1 , CB_1 , CA_1 , AC_1 , AB_1 и BA_1 , с помощта на Maple, получаваме афиксите на точките A_2 , B_2 и C_2 във вида

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2A_0^2 B_0^2 a(b-c) + (2A_0^2 - 1 - i\sqrt{3})bc}{2A_0^2 b - (1 + i\sqrt{3})c}, \\ b_1 &= \frac{2A_0^2 B_0^2 ca - A_0^2 ca(1 + i\sqrt{3}) + b(c-a)(1 + i\sqrt{3})}{A_0^2 [2B_0^2 c - a(1 + i\sqrt{3})]}, \\ c_1 &= \frac{(A_0^2 B_0^2 - 1)ab + A_0^2 c(b-c)}{A_0^2 B_0^2 b - a}. \end{aligned}$$

В горните равенства заместваем $a = 1$, $b = e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}}$, $c = e^{-i \cdot \frac{2\pi}{3}}$ и след известни пресмятания с помощта на Maple получаваме уравненията на окръжностите ω_a , ω_b и ω_c във вида

$$\begin{aligned} \omega_a : z\bar{z} + \bar{p}_1 z + p_1 \bar{z} + q_1 &= 0 \\ \omega_b : z\bar{z} + \bar{p}_2 z + p_2 \bar{z} + q_2 &= 0 \\ \omega_c : z\bar{z} + \bar{p}_3 z + p_3 \bar{z} + q_3 &= 0 \end{aligned}$$

където p_1, p_2, p_3 са комплексни числа, а q_1, q_2, q_3 са реални числа, зависещи от A_0 и B_0 . С помощта на тези уравнения показваме, че пресечните точки на двойките окръжности (ω_b, ω_c) , (ω_c, ω_a) и (ω_a, ω_b) лежат на една права. Оттук следва верността на твърдение 1.

Това доказателство на твърдение 1 притежава следните особености:

- 1) То не е по-лесно от синтетичното, тъй като е свързано с много пресмятания, които се извършват с помощта на програмата Maple;
- 2) Идеята му е по-лесна за прилагане по отношение на това, че не са необходими някои специални геометрични съображения и допълнителни построения, които са специално свързани с разглежданата конфигурация. Тази идея може да се използва и при атакуването на други подобни задачи;

- 3) То дава възможност да се получат допълнителни свойства на равностранныя триъгълник, които са свързани със същата конфигурация;
- 4) То може да се използва за установяване на подобно твърдение, отнасящо се до случая, в който една от точките A_1 , B_1 , C_1 е външна за $\triangle ABC$.
- 5) Получават се резултати, които могат да се използват при изследване на други подобни конфигурации.

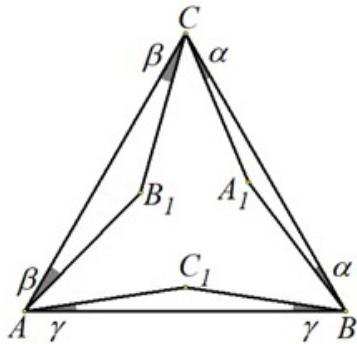
Четвъртата особеност е свързана с обосноваването на твърдение 2. Както в доказателството на твърдение 1, за да се получат точките A_1 и B_1 , е необходимо да завъртим векторите $\vec{BC}$ и $\vec{CA}$ съответно на ъгли α и β в посока обратна на часовниковата стрелка. За да получим, обаче, точката C_1 е необходимо да завъртим вектора $\vec{AB}$ на ъгъл $\gamma = \alpha + \beta - \frac{\pi}{6}$ в посока на часовниковата стрелка. Това означава, че векторът $\vec{AB}$ трябва да се завърти на ъгъл $-\gamma = \frac{\pi}{6} - \alpha - \beta$ в посока обратна на часовниковата стрелка. Следователно всички изведени формули в комплексната равнина, които се използват в доказателството на твърдение 1, ще останат същите, когато се използват за доказване на твърдение 2. Така получаваме обосноваване на твърдение 2 без да е необходимо да повтаряме пресмятанията, извършени при доказателството на твърдение 1.

Равностранен триъгълник, образуван от радикални оси

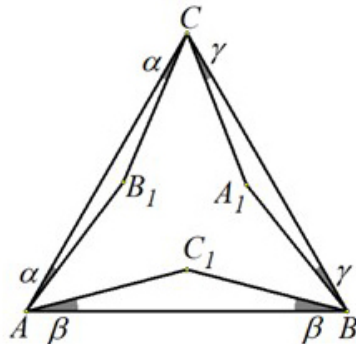
Освен разгледаната конфигурация от три окръжности, които се получават при конкретни стойности на ъглите α , β и γ (Фиг. 2), могат да се построят още две тройки окръжности при същите стойности на α , β и γ . Едната тройка окръжности може да се построи чрез равенствата $\sphericalangle A_1BC = \sphericalangle A_1CB = \gamma$, $\sphericalangle B_1CA = \sphericalangle B_1AC = \alpha$ и $\sphericalangle C_1AB = \sphericalangle C_1BA = \beta$ (Фиг. 3), а другата – чрез равенствата $\sphericalangle A_1BC = \sphericalangle A_1CB = \beta$, $\sphericalangle B_1CA = \sphericalangle B_1AC = \gamma$ и $\sphericalangle C_1AB = \sphericalangle C_1BA = \alpha$ (Фиг. 4). Тези конфигурации се получават като $\triangle ABC$ се завърти съответно на 120° и 240° при фиксирани стойности на ъглите α , β и γ .

Ако s_a , s_b и s_c са радикалните оси в съответните три случая и $s_b \cap s_c = A_3$, $s_c \cap s_a = B_3$ и $s_a \cap s_b = C_3$, с помощта на горните резултати получаваме следното:

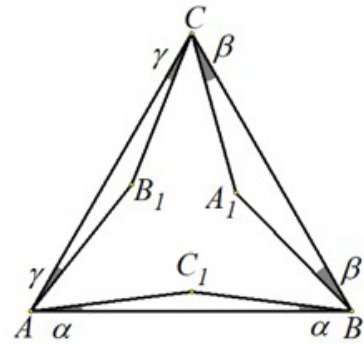
Твърдение 3. *Триъгълникът $A_3B_3C_3$ е равноностранен и центърът му съвпада с центъра на $\triangle ABC$ (Фиг. 13).*



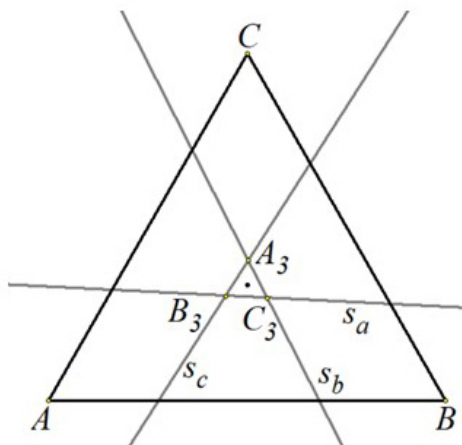
Фигура 10.



Фигура 11.



Фигура 12.



Фигура 13.

По същият начин се получава равностраничен триъгълник, който съответства на твърдение 2.

Подробни доказателства, използващи идеята за комплексни числа, на всички твърдения са представени в [2].

Елипси с общи точки

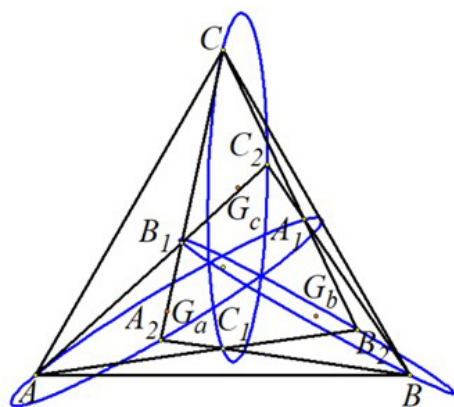
Около триъгълниците AA_1A_2 , BB_1B_2 и CC_1C_2 , разгледани в твърдения 1 и 2, могат да се опишат и елипси, центровете на които са медицентровете на съответните триъгълници. Експериментите с GSP показват, че е възможно да са изпълнени твърденията:

Твърдение 4. Даден е равностраничен триъгълник ABC . Точките A_1 , B_1 и C_1 са вътрешни за триъгълника, така че $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ и $\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ$. Нека BC_1 и CB_1 се пресичат в A_2 , CA_1 и AC_1 се пресичат в B_2 , а AB_1 и BA_1 се пресичат в C_2 . Елипсите, описани около триъгълниците AA_1A_2 , BB_1B_2

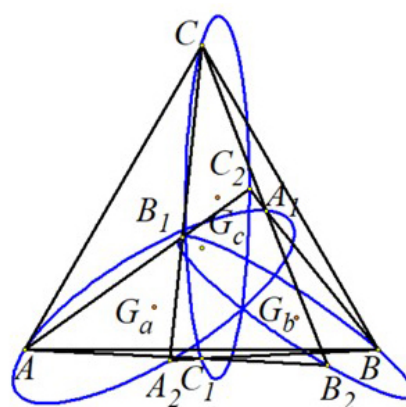
и CC_1C_2 , центровете на които са медицентровете на съответните триъгълници, имат две общи точки (Фиг. 14).

Твърдение 5. Даден е равностранен триъгълник ABC . Точките A_1 , B_1 и C_1 са вътрешни за триъгълника, така че $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ и $\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 120^\circ$. Нека BC_1 и CB_1 се пресичат в A_2 , CA_1 и AC_1 се пресичат в B_2 , а AB_1 и BA_1 се пресичат в C_2 . Елипсите, описани около триъгълниците AA_1A_2 , BB_1B_2 и CC_1C_2 , центровете на които са медицентровете на съответните триъгълници, имат две общи точки (Фиг. 15).

В търсенето на доказателства на тези твърдения могат да се използват общите резултати, получени при аналитичното доказателство на твърдение 1. За сега обаче строги доказателства не са получени. Затова твърдения 4 и 5 все още са само хипотези.



Фигура 14.



Фигура 15.

Литература

- [1] S. Grozdev, V. Nenkov. Тройки окръжности с две общи точки, *Математика плюс*, 4, 2023. ISSN: 0861-8321.
- [2] S. Grozdev, V. Nenkov, T. Madjarova, Радикални оси и комплексни числа, *IJCDM*, journal-1.eu, Vol. 8, 2023, ISSN: 2367-7775.
- [3] S. Grozdev, *For High Achievements in Mathematics: The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*, Association for the Development of Education, Sofia, 2007, ISBN: 978-954-92139-1-1.
- [4] M. Georgieva, S. Grozdev, *Morfodynamics for the development of the noosphere intellect*, (4th ed.), Publ. Hous Iztok-Zapad, Sofia, 2016, ISBN: 987-619-152-869-1, (In Bulgarian).

- [5] S. Karaibryamov, B. Tsareva, B. Zlatanov, Optimization of the Courses in Geometry by the Usage of Dynamic Geometry Software Sam, *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, 2013, Vol. 7, 1, 22–51, ISSN: 1933-2823.
- [6] V. Nenkov, *Mathematical competence increase through dynamic geometry*, Archimedes 2000, Sofia, 2020, ISBN: 978-954-779-291-3, (In Bulgarian).
- [7] T. Sergeeva, M. Shabanova, S. Grozdev, *Foundations of dynamic geometry*, ASOU, Moscow, 2014.

Сава Гроздев¹, Веселин Ненков², Татяна Маджарова³

¹ Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“

Факултет по математика и информатика,
бул. „България“ № 236, Пловдив, България

^{2,3} Висше военноморско училище „Н. Й. Вапцаров“

ул. „Васил Друмев“ № 73, Варна, България

Автор за кореспонденция: v.nenkov@nvna.eu

CONCERNING TWO SOLUTIONS OF A PROBLEM FROM THE IMO 2023 PAPER

Sava Grozdev, Veselin Nenkov, Tatiana Madjarova

Abstract. *Solutions to a task from the International Mathematical Olympiad in 2023 are examined synthetically and analytically. Some features of the solutions are noted, which characterize their advantages and disadvantages. These features are geometric and analytical in nature and reveal the specifics of the synthetic solution and the inconveniences that the analytical solution offers. On the other hand, the analytical solution takes precedence in further research on the topic that poses the task at hand.*