ИЗПОЛЗВАНЕ НА ЕВРИСТИЧЕН ПОДХОД ПРИ РЕШАВАНЕ НА ТЕКСТОВИ ЗАДАЧИ В 6. – 7. КЛАС

Цветелина Желязкова

Резюме. *В статията се разглежда приложението на евристичния подход при решаване на текстови задачи в 6. – 7. клас. Предложени са примерни задачи, илюстриращи реализацията му. Акцентува се на идеята за търсене на сходство в решенията на задачи с една и съща структура, но с различен сюжет.*

Ключови думи: евристичен подход, текстови задачи, математическо моделиране.

Въведение

Текстовите задачи са широко застъпени в целия курс на обучение по математика в училище. Още в 5. – 6. клас се решават текстови задачи (наречени още „практически задачи“) чрез моделиране с линейни уравнения. В следващите класове учениците прилагат новите знания и при изграждане и развиване на уменията си за решаване на текстови задачи чрез моделиране и с неравенства, а също и със системи от уравнения или неравенства. В настоящата разработка ще представим някои аспекти от нашия опит за приложение на евристичен подход при обучението в решаване на текстови задачи от общ характер, от движение и работа в 6. и в 7. клас.

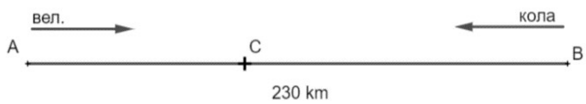
Изложение

Въпреки че понятията „път“, „скорост“ и „време“ са познати от предходните класове, в 6. – 7. клас процесът решаване на задачи от движение понякога предизвиква затруднения у част от учениците. Темата „Моделиране с линейни уравнения“ предполага използването на алгебричен метод при решаване на текстови задачи от общ характер, движение, работа и др. Наред с посочения метод, не бива да се пренебрегва и аритметичният метод, използван често в предишния етап на обучение. В [2] се разглежда възможността за приложение на единия или другия метод при решаването на задачи в началните класове. Въпреки че в учебниците за 6. – 7. клас решенията на задачите се представят посредством използване на алгебричен метод, естествено е, с оглед осъществяване на приемственост, учениците да се насочват към търсене на решение на задачите, използвайки и аритметичен метод, особено когато алгебричният не е автоматизиран. При разглеждане на темите, свързани с моделиране с уравнения, някои от задачите могат да се решават и с двата метода. Например при следната задача, която е подходяща за задължителните учебни часове.

Задача 1. В 8 ч. от град A за град B тръгва велосипедист със скорост 20 km/h. 30 минути по-късно от B за A тръгва лека кола със скорост 90 km/h. Ако разстоянието между двата града е 230 km, определете:

а) в колко часа е станала срещата;

б) в колко часа разстоянието между велосипедиста и леката кола ще бъде 22 km?



Фигура 1.

Ще разгледаме решението на подточка а) с двата метода, както следва:

Таблица 1.

Аритметичен метод:

Фигура 2.

$$V_{\text{вел.}} = 20\ km/h$$
$$V_{\text{к.}} = 90\ km/h$$

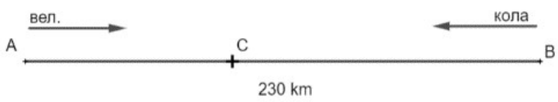
а) Нека 30 min след тръгването си велосипедистът е в т. D. В този момент колата тръгва от точка B.

$$S_{AD} = \frac{1}{2}.20 = 10\ km.$$

Тогава разстоянието $S_{DB} = 230 - 10 = 220\ km$. Двете превозни средства за 1 час изминават: $90 + 20 = 110\ km$. Тогава срещата ще бъде след: $t = \frac{220}{110} = 2\ h$ от тръгването на колата. А тъй като тя е потеглила в 8 ч. и 30 мин., то срещата е станала в 10 ч. 30 мин.

Алгебричен метод:

	$V(km/h)$	$t(h)$	$S(km)$
Движение на велосипедиста	20	x	$20x$
Движение на колата	90	$x-\frac{1}{2}$	$90\left(x-\frac{1}{2}\right)$



Фигура 3.

а) Нека времето, което се движи велосипедистът до срещата, е $t_{\text{в.}} = xh$, а колата $t_{\text{k}} = \left(x-\frac{1}{2}\right)h$. ДС: $x > \frac{1}{2}$. ($30\ min = \frac{1}{2}h$)

Нека срещата е в т. C. Тогава:

$$S_{AC} + S_{BC} = 230\ km, \quad 20x + 90\left(x-\frac{1}{2}\right) = 230.$$

Като се реши уравнението, се получава

$$x = 2,5; \quad 2,5 \in \text{ДС}. \quad t_{\text{в.}} = 2,5\ h.$$

Понеже той е потеглил в 8 ч., то срещата е била в 10 ч. 30 мин.

Тъй като в условието на задачата не е посочено дали се търси часът, в който разстоянието между тях е 22 km преди срещата или след нея, за да отговаря решението на изискването за пълнота, се разглеждат и двата случая. При решаване с аритметичен метод, използвайки получените резултати в подточка а), може да се намери за колко време двете превозни средства могат да изминат 22 km, т.е. $\frac{22}{110} = \frac{1}{5}\ h = 12\ min$. Следователно преди срещата те ще бъдат на разстояние 22 km един от друг в 10 ч. 18 мин. След срещата те ще бъдат на разстояние 22 km в 10 ч. 42 мин. Може да се представи решение и чрез съставяне на уравнение за изминатото разстояние във всеки от случаите.

Независимо дали задачата се решава самостоятелно, или с помощта на учителя, приложими са въпросите и указанията, предложени от Пойа в [3, с. 148 – 149]. Учителят следва да зададе точния въпрос, който ще провокира ученика, но без да съдържа отговор. Някои подходящи въпроси, предложени в [3, с. 148 – 149], както и други, преформулирани с цел да са уместни в конкретната ситуация, са: „Какво е дадено?“, „Кое е неизвестното?“; „Как можете да използвате дадената информация?“, „Срещали ли сте подобна задача?“ и др. Уместни са и насочващи указания: „Направете схема“, „Въведете означения“, „Отделете различните части на условието и ги запишете!“.

Задача 1 може да бъде решена чрез използването и на двата метода (аритметичен и алгебричен). Ключов момент при решаването е осмислянето на условието, „вникването“ в същността на задачната ситуация. Използвайки аритметичен метод, учениците отделят подзадачи: намиране на разстоянието, изминато от велосипедиста до тръгването на колата; намиране на разстоянието, което изминават до срещата от момента на тръгване на леката кола; времето, необходимо за изминаване на съответното разстояние. В подточка б) след установяване на двете възможни положения за превозните средства, когато разстоянието между тях е 22 km, се намира за колко време те изминават съответното разстояние и се определя търсеното време. Последователното решаване на тези подзадачи довежда до решението на дадената задача.

В последния етап от решението „Поглед назад“ е подходящо да се сравнят двата метода и да се направят изводи, свързани с тяхната приложимост и рационалност. По такъв начин умението за търсене и откриване на подзадачите (задачи-компоненти на дадената) се свързва с евристичните способности на учениците. От друга страна, търсенето и откриването на решение на задачата с алгебричен метод също има своя евристичен потенциал. Решаването на готовото уравнение е алгоритмична задача, позната за учениците, но съставянето на уравнението невинаги е безпроблемно и, както посочва В. А. Далингер за този етап: „който е в значително по-малка степен формализуем и изисква от решаващия разбиране на дадените в задачата условия и превода им на езика на математиката, и този етап в по-голяма степен, отколкото всички останали, носи евристичен характер“ [1, с. 47]. Ролята на учителя в този етап е от съществено значение. Според Пойа „Идеите би трябвало да се раждат в ума на ученика, а учителят да действува само като акушерка“ [4, с. 307].

Използвайки евристична беседа, учителят би могъл да ръководи и да съдейства за успешното протичане на процеса търсене и откриване на решение на задачата. В следващите редове ще представим пример, приложим в задължителните учебни часове по математика, като с оглед на ограничения обем на разработката, ще спрем диалога до съставяне на плана за решение на задачата.

Задача 2. Моторна лодка може да измине разстоянието между две пристанища и да се върне обратно (без престой) за $7\ h$. Ако е известно, че скоростта на течението е $3\ km/h$ и скоростта на лодката в спокойни води е 7 пъти по-голяма от скоростта на течението, да се намери разстоянието между двете пристанища.

Таблица 2.

Решение I.

	$S(km)$	$V(km/h)$	$t(h)$
Движение по течението	x	24	$\frac{x}{24}$
Движение срещу течението	x	18	$\frac{x}{18}$

$$V_{\text{т.}} = 3\ km/h; \quad V_{\text{л.}} = 7.3 = 21\ km/h.$$
$$V_1 = V_{\text{л.}} + V_{\text{т.}} = 24\ km/h \ \ \textit{по течението}$$
$$V_2 = V_{\text{л.}} - V_{\text{т.}} = 18\ km/h \ \ \textit{срещу течението}$$

Нека разстоянието между двете пристанища е $x\ km$. ДС: $x > 0$.

$$t = \frac{S}{V}; \quad t_1 + t_2 = 7$$
$$\frac{x}{24} + \frac{x}{18} = 7 \ \Leftrightarrow \ x = 72; \quad 72 \in \text{ДС}.$$

Разстоянието между двете пристанища е $72\ km$.

Решение II.

	$t(h)$	$V(km/h)$	$S(km)$
Движение по течението	y	24	$24y$
Движение срещу течението	$7-y$	18	$18(7-y)$

$$V_{\text{т.}} = 3\ km/h; \quad V_{\text{л.}} = 7.3 = 21\ km/h.$$
$$V_1 = V_{\text{л.}} + V_{\text{т.}} = 24\ km/h\ \ \textit{по течението}$$
$$V_2 = V_{\text{л.}} - V_{\text{т.}} = 18\ km/h\ \ \textit{срещу течението}$$

Нека по течението на реката лодката се движи y h. ДС: $7 > y > 0$

$$S_{\text{по теч.}} = S_{\text{срещу теч.}}$$
$$24y = 18(7 - y)$$
$$42y = 126\ \Leftrightarrow\ y = 3; \quad 3 \in \text{ДС}.$$
$$S = 24.3 = 72\ km.$$

Разстоянието между двете пристанища е 72 km.

Какво е дадено? *Времето, за което лодката изминава разстоянието между двете пристанища и се връща обратно, скоростта на течението и връзка между скоростта на течението и скоростта на лодката в спокойна вода.*

Какво се търси в задачата? *Разстоянието между двете пристанища.*

Не сте ли решавали вече подобна задача? *По-лесна от тази. Времето за движение в една от посоките беше дадено.*

Лодката по течението ли се движи или срещу него? *В едната посока се движи по течението, а в другата срещу него.*

Кои величини определят търсената? *Скоростта на лодката (по течение/срещу течение) и съответното време за движение.*

А каква е връзката между път, скорост и време? $S = V.t$

Известни ли са стойностите на величините, определящи търсената? *Ако не, можете ли да ги определите или поне някои от тях? Скоростта на лодката по течението и скоростта срещу течението могат да бъдат определени. Известно е общото време за изминаване на разстоянието в двете посоки. Не знаем как от първоначалната информация да определим времето за изминаване на разстоянието само в една от двете посоки.*

Както посочихте, лодката се движи в едната посока по течението, а в другата срещу течението. Има ли връзка между изминатото разстояние в едната посока и в другата посока? *Изминатото разстояние е едно и също.*

Какво е известно за времето, необходимо за изминаване на тези разстояния? *Общото време за движение е* $7\ h$.

Как може да използвате тази информация? Не сте ли срещали задачи, от движение по суша например, в които имате подобни ситуации?

Ще изразим времето за движение във всяка от посоките чрез пътя и скоростта. $\left(t = \dfrac{S}{V}\right)$ и ще използваме дадената информация за времето на движение общо в двете посоки – $7\ h$. Така ще съставим уравнение, от което ще намерим разстоянието между двете пристанища.

или

Ще изразим разстоянието между двете пристанища чрез скоростта и времето за движение по два начина – по течението и срещу течението. Така ще съставим уравнение, решаването на което ще даде отговор за времето на движение в една от двете посоки.

От предложените отговори се оформят две идеи за решаване на задачата.

В хода на евристичната беседа учениците често сами достигат до различни идеи за решаване на дадена задача. Според времето, с което разполага учителят по време на занятието и предварителната подготовка на учениците, както и опита им с подобни задачи, е възможно да се разгледат последователно и двата начина или класът да се раздели на групи, всяка от които извършва самостоятелно реализацията на плана по един от двата начина. Решенията се записват на дъската от учителя или от учениците в зависимост от избрания сценарий за работа.

В 6. – 7. клас се разглеждат и задачи с различен сюжет, но с обща структура. Пропускът да се акцентира върху еднаквата структура вместо върху различната фабула, според наблюденията ни, води до възприемането от учениците на тези задачи като напълно различни и вследствие на неразбиране на сходството с решаваните по-рано задачи, за учениците настъпва „изкуствено претоварване“ по отношение на обема от „различните типове“ задачи. Използването на евристичен подход при разглеждане на темите, свързани с моделиране с линейни уравнения, провокирането на учениците сами да достигнат до откриване на общото при решаване на различните по сюжет задачи, би могло да благоприятства успешното реализиране на процеса решаване на текстови задачи.

В следващите редове ще представим един опит за осъществяване на връзка при решаването на задачи от различни теми от учебното съдържание в задължителните учебни часове, като акцентът ще бъде върху промяната на сюжета на задачата, но запазване на структурата и съответно математическия модел за решаване.

Опитът ни показва, че връзката между задачите от движение и работа нерядко е трудно доловима. Според наблюденията ни да се направи аналогия при разглеждане на формулите $S = V.t$ и $A = N.t$ за някои ученици в 6. – 7. клас също не винаги е лесна задача. Затова в хода на работа при въвеждане на задачите с новия сюжет започваме от конкретен пример със задача от разгледаните до този момент (от движение) и изменяме само фабулата. В началото използваме задача, която има същия модел за решение и с цел да акцентираме върху току-що посочените аспекти, запазваме дори числовите данни и съответно решението. При следващите задачи запазваме само модела. В тази последователност на разглеждане на задачите, провокирайки учениците с конкретни въпроси, целим те сами да „извървяват пътя“ и да открият сходството в „различните“ задачи. Учителят може да използва реална ситуация, с която да „състави“ новата задача от работа. Сюжетът може да бъде свързан с интересите на учениците с цел да ги мотивира, да привлече вниманието им към съставянето на „новата задача“, да провокира положителни емоции у тях. Така например, съобразено с времето от календара, в което се разглежда темата „Задачи от работа“ в 7. клас, включвайки идея за традиционните коледни базари, учителят би могъл, основавайки се на данните от току-що решената задача от движение, да „облече в нови думи“ последната, да смени фабулата и да получи новата задача. Важно е подреждането на дъската (съкратения запис на условието, онагледяването чрез схема, таблица, чертеж и решенията на задачите) относно възможността за анализиране, сравняване, откриване на аналогия, обобщаване.

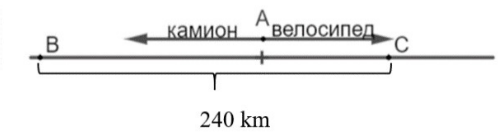
Нека изходната задача (която може да бъде част от предварителната домашна работа) да бъде следната:

Задача 3. От град A в 8 ч. сутринта потегля велосипедист. Два часа по-късно от град A в противоположна посока потегля камион. Известно е, че в 12 ч. разстоянието между тях е 240 km и скоростта на велосипедиста е $\frac{1}{6}$ от скоростта на камиона. Намерете скоростите на велосипеда и камиона.

След решаването на задачата и записването ѝ на дъската, учителят би могъл да привлече вниманието на учениците с въпрос, насочващ към новата тема. Например: за предварителната организация, необходима за изработване на картички за предстоящия коледен базар. Така например може да се посочи, че времето за работа на учениците в 6. клас е 4 h, а за тези в 7. клас е 2 h, учителят може да постави и условията, че необходимият брой картички за участие в базара е 240, както и че учениците в 6. клас за един час изработват $\frac{1}{6}$ от картичките, изработени от учениците в 7. клас за същото време (според наблюденията от предходната година). Тогава естествено възниква въпросът за броя картички, които изработва всеки от екипите за един час.

Таблица 3.

Решение на зад. 3.



Фигура 4.

$$V_{\text{в.}} = \frac{1}{6} V_{\text{к.}}$$

Нека в 12 ч. камионът е в точка B, а велосипедистът – в точка C. Нека

$$V_k = x\ km/h,\ \text{ДС}:\ x > 0, \quad V_{\text{в.}} = \frac{1}{6}x\ km/h, \quad S = V.t$$

	$V(km/h)$	$t(h)$	$S(km)$
Движ. на велосип.	$\frac{1}{6}x$	4	$\frac{2}{3}x$
Движ. на камиона	x	2	$2x$

$$S_{\text{в.}} + S_{\text{к.}} = 240\ km$$

$$\frac{2}{3}x + 2x = 240 \ \Leftrightarrow\ x = 90, \quad 90 \in \text{ДС}$$

$$V_k = 90\ km/h; \quad V_{\text{в.}} = \frac{1}{6}.90 = 15\ km/h.$$

Задачата може да бъде формулирана по следния начин:

Задача 4. Учениците от 6. и 7. клас в едно училище изработват картички за коледен базар. Известно е, че за един час учениците от 6. клас изработват $\frac{1}{6}$ от картичките, изработени за същото време от учениците в 7. клас. Ако шестокласниците започват работа в 8 ч., а седмокласниците се включват два часа по-късно и в 12 ч. са изработени 240 картички, намерете по колко картички за един час изработват учениците от 6. клас и по колко тези от 7. клас.

Таблица 4.

Решение на зад. 4.

VII клас – x бр. картички за един час, $x \in N$; $t_{7\text{ кл.}} = 2\ h$,

VI клас – $\frac{1}{6}x$ бр. картички за един час; $t_{6\text{ кл.}} = 4\ h$

Всички изработени картички са 240.

Колко картички са изработили седмокласниците до 12 ч.?

Отг.: $2x$ картички.

Колко картички са изработили шестокласниците до 12 ч.?

Отг.: $4.\frac{1}{6}.x = \frac{2}{3}x$ картички.

$$2x + \frac{2}{3}x = 240 \ \Leftrightarrow\ x = 90, \quad 90 \in N$$

Седмокласниците изработват по 90 картички за един час, а шестокласниците по $\frac{1}{6}.90 = 15$ бр.

Конкретният сюжет на задачата може да бъде съставен и с помощта на учениците. Неусетно, решавайки на пръв поглед реален ежедневен проблем, те са въвлечени в процеса на решаване на задачи от работа. Посоченият пример може да се използва за въвеждане на новите понятия, както и да провокира откриването на зависимостта ($A = N.t$) между дадените величини. Подходящо е подреждане на данните и от новата задача в таблица. Сравняването на решенията на двете задачи, естественото откриване на аналогия между величините, които характеризират разглежданите обекти, способстват за ориентирането на ученика и за осигуряване на възможности за пренос на знанията от решаване на вече познатите задачи при решаване на „новата“ задача, имаща същата структура. Подходящо е да се разгледат и други примери, с които да се акцентира на сходството в решенията.

Тъй като някои от задачите от общ характер, предвидени за разглеждане в прогимназиален етап, използват същия модел, възможно е в хода на работа да се обърне внимание и на този тип задачи. Като примерни (в които запазваме модела, но изменяме сюжета) могат да се разгледат следните задачи:

Задача 5. Група приятели решили да купят подарък на Мая за рождения ѝ ден. Те пресметнали, че ако съберат по 15 лв., няма да им стигнат 10 лв., а ако съберат по 19 лв., ще им останат 10 лв. за цветя. Колко са приятелите, решили да купят подарък, и колко лв. струва подаръкът?

Таблица 5.

	Вноска (лв.)	Бр. приятели	Събрана сума S (лв.)
I н.	15	x	$15x$
II н.	19	x	$19x$

$$S_{\text{Iн.}} + 10 = S_{\text{IIн.}} - 10$$

Задача 6. Велосипедист трябвало да измине дадено разстояние за определено време. Той пресметнал, че ако се движи с 16 km/h за планираното време ще измине с 3 km по-малко. Ако се движи с 18 km/h, ще измине с 3 km повече. Да се намери разстоянието и времето, за което е трябвало да се измине.

Таблица 6.

	$V(km/h)$	$t(h)$	$S(km)$
I н.	16	x	$16x$
II н.	18	x	$18x$

$$S_{\text{Iн.}} + 3 = S_{\text{IIн.}} - 3$$

Задача 7. Група шивачки трябвало да изработят дадена поръчка, като ушиват по 20 рокли на ден. При започване на работа поръчката се увеличила и те пресметнали, че ако следват плана, ще ушият с 20 рокли по-малко от възложеното. Затова увеличи дневната норма с 5 рокли и за планираното време преизпълнили поръчката с 20 бройки. Да се определи от колко броя рокли се състои поръчката и за колко време са изработени.

Таблица 7.

	N	t	A
по план	20	x	$20x$
в действителност	25	x	$25x$

$$A_{\text{план}} + 20 = A_{\text{в действ.}} - 20$$

На последния етап, когато учениците вече са придобили достатъчно умения за решаване на текстови задачи, учителят може да постави творческа задача за превръщане дадени задачи от един сюжет в друг, като се запазва и математическият модел.

В процеса на решаване на задачите е препоръчително да се следват етапите от актуализирания модел на четири-етапната схема на Пойа [3], предложени в [5, с. 170 – 174]. Въпросите, използвани от учителя в процеса на търсене на решение, следва да бъдат конкретни, точни, кратки, ясни. Възможно е да се използват и някои евристични насочвания. Например: „Моделирай“, „Преформулирай въпроса“, „Премини към равносилна задача“ и други. Записът често включва и средства за онагледяване (таблици, схеми и др.), които спомагат за възприемането на информацията, нейното анализиране и биха могли да подпомогнат досещането за подходяща идея за решаване на задачата.

Заключение

В разработката поставихме акцент на три основни момента:

1) решаване на задачи с аритметичен и алгебричен метод;
2) евристична беседа, съпътстваща процесите търсене и откриване на решение на задачи;
3) решаване на задачи с една и съща структура, но с различен сюжет. Последната точка може да се разшири по отношение на разглеждане на други задачи от същите типове, както и на задачи с други сюжети, което ще бъде предмет на разглеждане в следващи публикации.

Литература

[1] В. Далингер, Текстовые сюжетные задачи, их классификация и методические рекомендации по обучению учащихся их решению, *Actual Pedagogy*, 2016, Vol. 1, pp. 46–56, ISSN: 2464-675X, available on http://sociosphera.com/files/conference/2016/Aktualni_pedagogika_1_2016/aktualni_pedagogika_1-2016.pdf

[2] З. Лалчев, М. Върбанова, И. Вутова, Аритметичен или алгебричен метод при решаване на задачи в началната училищна математика, *Математика и информатика*, 2016, бр. 1, стр. 11–28, ISSN (print): 1310-2230, ISSN (online): 1314-8532.

[3] Д. Пойа, *Как да се решава задача*, Народна просвета, София, 1972.

[4] Д. Пойа, *Математическото откритие*, Народна просвета, София, 1968.

[5] Е. Скафа, В. Милушев, *Конструиране на учебно-познавателната евристична дейност по решаване на математически задачи*, УИ „Паисий Хилендарски“, Пловдив, 2009, ISBN: 978-954-423-567-3.

Цветелина Желязкова
Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“
Факултет по математика и информатика,
бул. „България“ № 236, Пловдив, България
Автор за кореспонденция: tsvetelina.zhelyazkova@yahoo.com

USING A HEURISTIC APPROACH TO MATHEMATICAL WORD PROBLEM SOLVING IN 6$^{\mathrm{TH}}$ – 7$^{\mathrm{TH}}$ GRADE

Tsvetelina Zhelyazkova

Abstract. *The article presents the application of the heuristic approach to mathematical word problems solving in 6th – 7th grade. Some examples of mathematical problems, illustrating its implementation are suggested. The emphasis is placed on the idea of searching for similarity in the solutions of word problems with the same structure but with different plot.*

Key words: Heuristic approach, Mathematical word problems, Mathematical modeling.